# POLINOMIOS. FACTORIZACIÓN

## JUSTIFICACIÓN

Es muy fácil realizar multiplicaciones de números naturales. Más dificultad entraña el problema inverso: la factorización. Así, realizar la multiplicación $223 \cdot 137 = 30551$ es trivial, pero sin embargo si nos piden que hallemos dos números que multiplicados den como resultado 30551, es problema es más complejo. (Inténtese, por ejemplo, hallar dos números que multiplicados den como resultado 73111).

Una vez aprendemos a multiplicar polinomios, es natural preguntarse por el problema inverso: la factorización. Aquí la situación es mucho más complicada, ya que es más difícil y lento dividir polinomios que números naturales, y además no disponemos de criterios de divisibilidad con ellos.

## DEFINICIONES:

Un polinomio se dice que es irreducible si no se puede poner como producto de otros dos polinomios.
Nota: Obsérvese la analogía con el concepto de número primo.

Ejemplo: $P(x) = x^2 - 6x + 5$ no es irreducible porque puede ponerse como producto de otros dos polinomios, ya que $(x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$ (¡compruébese!).
Ejemplo: $P(x) = x^2 + 1$ es irreducible porque no existen dos polinomios que al ser multiplicados den como resultado $P(x)$.

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de polinomios irreducibles.
Nota: Obsérvese la analogía con los números enteros: factorizar un número entero es escribirlo como producto de números primos.

## TÉCNICAS DE FACTORIZACIÓN

Estudiaremos cuatro técnicas de factorización, a saber:

1.- Factorización mediante Factor Común: Válido para los polinomios en los que se pueda sacar factor común de $x^n$.
2.- Factorización por Identidades Notables: Válido cuando el polinomio se puede expresar como una identidad notable.
3.- Factorización por Resolución de Ecuación: Válido para polinomios de 2º grado.
4.- Factorización por Ruffini: Válido para cualquier polinomio.

Además, primeo intentaremos siempre factorizar por Factor Común y por Identidades Notables, y después por las otras dos técnicas. En ocasiones habrá que aplicar varias de ellas para factorizar un polinomio.

Por supuesto, siempre que todos los coeficientes sean divisibles por el mismo número, lo primero que se hará será extraer factor común ese número. Esto simplificará en gran medida todos los cálculos que tengamos que hacer.

Ejemplo: Si tenemos que factorizar $P(x)=5x^4-25x^2+30$, lo primero que haremos será sacar factor común 5, quedando $P(x)=5\left(x^4-5x^2+6\right)$, y trabajaremos sobre el polinomio $x^4-5x^2+6$.

Ejemplo: Si tenemos que factorizar $P(x)=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{3}$, lo primero que haremos será sacar factor común $\frac{1}{3}$, quedando $P(x)=\frac{1}{3}\left(2x^5-x^3+5\right)$, y trabajaremos sobre el polinomio $2x^5-x^3+5$.

## FACTORIZACIÓN MEDIANTE FACTOR COMÚN

Esta técnica es válida para polinomios en los que se pueda sacar factor común de $x^n$. Siempre se extraerá $x$ elevado al mayor exponente posible.

Ejemplo: $4x^3-x^2+2x=x\left(4x^2-x+2\right)$

Ejemplo: $x^5-\frac{1}{2}x^4+2x^3=x^3\left(x^2-\frac{1}{2}x+2\right)$

## FACTORIZACIÓN POR IDENTIDADES NOTABLES

Esta técnica es válida cuando el polinomio se puede expresar como una identidad notable. Recodemos que las identidades notables son las siguientes:

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ o también $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ o también $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Las dos primeras identidades notables se escriben de manera compacta así:

$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$ o también $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

Ejemplo: $x^2-25=(x+5)(x-5)$

Ejemplo: $x^4-16=\left(x^2+16\right)\left(x^2-16\right)=\left(x^2+16\right)(x+4)(x-4)$

## FACTORIZACIÓN POR RESOLUCIÓN DE ECUACIÓN

Esta técnica es válida para polinomios de segundo grado.
Sea $P(x)=ax^2+bx+c$ un polinomio de segundo grado. Planteamos la ecuación $P(x)=0$, es decir, $ax^2+bx+c=0$, y caben tres posibilidades atendiendo a sus soluciones:

0 soluciones: $P(x)$ no se puede factorizar.

1 solución doble $x_1$: $P(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.

2 soluciones $x_1$ y $x_2$: $P(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Nota: Obsérvese que el caso de 1 solución doble es un caso particular del caso de 2 soluciones, haciendo $x_2=x_1$.

## FACTORIZACIÓN POR RUFFINI

Esta técnica es válida para cualquier polinomio. Se prueba a hacer la división por Ruffini entre polinomios del tipo $(x-a)$. Para probar valores de $a$, hemos de tener en cuenta los siguientes resultados:

Teorema: Si $P(x)$ tiene como término independiente $p_0$, y es divisible entre $(x-a)$ con $p_0$ y $a$ **enteros**, entonces $p_0$ ha de ser divisible por $a$.
Este resultado nos dice que los posibles valores de $a$ hay que buscarlos entre los divisores de $p_0$.

Teorema del Resto: El resto de la división $P(x):(x-a)$ es $P(a)$.
Nota: En el caso particular de que $P(a)=0$, significa que $P(x)$ es divisible por $(x-a)$. De aquí extraemos el siguiente
Corolario: $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ si $P(a)=0$

Veamos esta técnica de factorización con un ejemplo:

Ejemplo: Para factorizar $P(x)=2x^6+x^5-8x^4-x^3+6x^2$ procedemos de la siguiente forma:
1.- ¿Se puede extraer factor común? Sí, extraemos factor común $x^2$ y obtenemos:
$P(x)=2x^6+x^5-8x^4-x^3+6x^2=x^2\left(2x^4+x^3-8x^2-x+6\right)$
Nos fijamos ahora en $Q(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$:
2.- ¿Se puede aplicar alguna Identidad Notable? No parece.
3.- No podemos factorizar resolviendo la ecuación $2x^4+x^3-8x^2-x+6=0$, porque es de grado 4 y no sabemos resolverla.

4.- Probemos a dividir por Ruffini.

El término independiente de $2x^4+x^3-8x^2-x+6$ es 6. Los posibles valores de $a$ se encuentran entre los divisores de $a$, que son:

$Div(6)=\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 6\}$

Entre estos valores, los que nos sirven son aquellos que anulen el polinomio $Q(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$, así que probamos:

$Q(1)=2\cdot 1^4+1^3-8\cdot 1^2-1+6=0$. Por tanto $Q(x)$ es divisible por $(x-1)$.

$Q(-1)=\cdots=0$. Por tanto $Q(x)$ es divisible por $(x+1)$.

$Q(2)=\cdots=12$. Por tanto $Q(x)$ no es divisible por $(x-2)$.

$Q(-2)=\cdots=0$. Por tanto $Q(x)$ es divisible por $(x+2)$.

$Q(3)=\cdots=120$. Por tanto $Q(x)$ no es divisible por $(x-3)$.

$Q(-3)=\cdots=72$. Por tanto $Q(x)$ no es divisible por $(x+3)$.

$Q(6)=\cdots=2520$. Por tanto $Q(x)$ no es divisible por $(x-6)$.

$Q(-6)=\cdots=2100$. Por tanto $Q(x)$ no es divisible por $(x+6)$.

Probaremos, entonces, a dividir entre $(x-1)$, $(x+1)$ y $(x+2)$ por Ruffini (es decir, $a=1$, $a=-1$ y $a=-2$):

$\underline{a=1}$: Realizamos la división $(2x^4+x^3-8x^2-x+6):(x-1)$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & & 2 & 3 & -5 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(2x^4+x^3-8x^2-x+6):(x-1)=2x^3+3x^2-5x-6$$

Probamos a dividir otra vez (podría ser raíz doble):

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & & 2 & 5 & 0 \\ \hline & 2 & 5 & 0 & -6 \end{array}$$

Vemos que no da exacta. Dividimos el resultado de la división anterior por…

$\underline{a=-1}$: Realizamos la división $(2x^3+3x^2-5x-6):(x+1)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(2x^3+3x^2-5x-6):(x+1)=2x^2+x-6 \quad (*)$$

Probamos a dividir otra vez (podría ser raíz doble):

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & -6 \\ -1 & & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & -5 \end{array}$$

Vemos que no da exacta. Dividimos el resultado de la división anterior por…

$\underline{a=-2}$: Realizamos la división $(2x^2+x-6):(x+2)$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & -6 \\ -2 & & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array} \qquad 2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$$

Así, finalmente, tenemos que la factorización del polinomio $P(x)$ es:

$P(x)=2x^6+x^5-8x^4-x^3+6x^2=x^2(x-1)(x+1)(x+2)(2x-3)$

Y sacando factor común 2 en el último factor tenemos que

$$P(x)=2x^6+x^5-8x^4-x^3+6x^2=2x^2(x-1)(x+1)(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

<u>Nota</u>: En (*) hemos obtenido el polinomio de 2º grado $2x^2+x-6$, por lo que también podríamos haber seguido factorizando mediante la resolución de la ecuación $2x^2+x-6=0$ así:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 7}{4}=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\\ -2\end{cases}$$

Con lo que la factorización quedaría como:

$$P(x)=2x^6+x^5-8x^4-x^3+6x^2=2x^2(x-1)(x+1)(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

# EJERCICIOS

1.- Extrae factor común:

a) $5x^2-15x^3+25x^4$

b) $2(x-3)+3(x-3)-5(x-3)$

c) $12x^3-8x^2-4x$

d) $-3x^3+x-x^2$

e) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x$

f) $3x^5-9x^3+6x$

2.- Factoriza mediante identidades notables:

a) $x^2+8x+16$ b) $x^2-2x+1$ c) $x^2-36$

d) $a^2+4a+4$ e) $a^2-2a+1$ f) $a^2-16$

g) $9x^2+6x+1$ h) $16-25x^2$ i) $x^4-6x^2+9$

3.- Factoriza mediante factor común e identidades notables:

a) $x^2-6x+9$ b) $x^3-9x$ c) $3x^2+6x+3$

d) $2x^3-12x^2+18x$ e) $x^4-x^2$ f) $4x^2+4x+1$

4.- Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^4-4x^3-9x^2+x+2$ 4(-1,2,-1/2,1/2)

b) $x^4-x^3-20x^2$ (5, -4)

c) $12x^5-36x^4+27x^3$ 3(3/2, 3/2)

d) $4x^2-8x+3$ (1/2, 3/2)

e) $x^3-x+6$ (-2, x^2-2x+3)

f) $10x^4-3x^3-41x^2+12x+4$ (2, -2, ½, -1/5)

g) $3x^2+2x-8$

h) $3x^5-48x$

i) $2x^3+x^2-5x+12$

j) $x^3-7x^2+8x+16$

k) $x^4+2x^3-23x^2-60x$

l) $x^2+4x-5$

m) $x^2+8x+15$

n) $7x^2-21x-280$

o) $3x^2+9x-210$

p) $2x^2-9x-5$

q) $3x^2-2x-5$

r) $4x^2+17x+15$

s) $-x^2+17x-72$

t) $x^3+2x^2-x-2$

u) $3x^3-15x^2+12x$

v) $x^3-9x^2+15x-7$

w) $x^4-13x^2+36$

x) $x^3-2x^2-2x-3$

y) $2x^3-7x^2-19x+60$

z) $4x^4+4x^3-3x^2-4x-1$