INICIACIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Sabemos que no existe ningún número real x que cumpla que $x^2 = -1$. Ahora bien, imaginemos que existiera un número, al que llamamos i, que cumpla la relación $i^2 = 1$.

Entonces, por ejemplo, tendríamos que $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$.

Ejercicio 1: Calcula los valores de las potencias i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}. ¿Qué observas? ¿Qué valdrá i^{100}? ¿Y i^{2011}? ¿Y i^{12345}? ¿Cuál es el método general para calcular i^n?

Ejercicio 2: Calcula i^{-1}, i^{-3}. Indicaciones: ¿Qué significa un exponente negativo? Puedes multiplicar el numerador y denominador de una fracción por el mismo número, ¿cuál será el adecuado en cada caso?

Al "número" i se le llama *unidad imaginaria*, y es realmente un número, pero no un número real, sino un número *complejo*. Los números complejos son una *extensión* de los números reales (al igual que los reales son una extensión de los racionales, o los enteros son una extensión de los naturales)

En realidad, un número complejo es una expresión del tipo $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, como por ejemplo $2 - 3i$, $1 + i$, ó $3 + \sqrt{2}i$.

Se opera con ellos como si se tratase de un polinomio, pero teniendo en cuenta que al ser $i^2 = -1$, cuando aparezcan potencias de i se simplificarán los resultados. Por ejemplo:

$$(1+3i) - (-2-7i) = 1 + 3i + 2 + 7i = 3 + 10i$$

$$2i \cdot (-4i) = -8i^2 = -8 \cdot (-1) = 8$$

$$(1+2i)(2-3i) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3i + 2i \cdot 2 - 2i \cdot 3i = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 2 - 3i + 4i + 6 = 8 + i$$

Ejercicio 3: Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\left(3 - \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}i\right) - 2$ (sol. $\frac{8}{5} - \frac{7}{6}i$)

b) $3(-2-4i) + 5\left(\frac{3}{2} - i\right)$ (sol. $\frac{3}{2} - 17i$)

c) $(3+i)\left(\frac{1}{2} + 2i\right)$ (sol. $-\frac{1}{2} + \frac{13}{2}i$)

d) $(3+i)^2$ (sol. $8 + 6i$)

e) $\left(\sqrt{3} + 2i\right)^2 - \left(\sqrt{3} - 2i\right)^2$ (sol. $4\sqrt{3}i$)