RACIONALIZACIÓN

JUSTIFICACIÓN

Se define fracción como la expresión $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ahora bien, teniendo en cuenta que uno de los significados de la fracción es la división: $\frac{a}{b} = a : b$, entonces podemos extender el concepto de fracción considerando para a y b números reales cualesquiera.

Especial atención merece el caso en que a y b son enteros o raíces de enteros (por ejemplo, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{7}$, $\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$, etc…).

Cuando queremos realizar operaciones con estas raíces, es más que conveniente que en el denominador no aparezcan raíces. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN:

Racionalizar una fracción consiste en hallar otra fracción equivalente de forma que el denominador sea un número entero.

PRERREQUISITOS

Serán necesarias las identidades notables:

$(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad\qquad$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Especialmente ésta última. Obsérvese que si a o b son raíces, al hacer el producto de la suma por la diferencia, las raíces desaparecen (debido a los cuadrados).

Ejemplo: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1.$

TÉCNICAS DE RACIONALIZACIÓN

Si bien existe una infinidad de tipos de fracciones (las raíces no tienen por qué ser cuadradas…), veremos únicamente la racionalización de tres tipos de fracciones, por una razón: los demás tipos de racionalización son tan infrecuentes como farragosos.

Consideremos, pues, tres casos:

1.- Si el denominador es una raíz cuadrada, multiplicaremos numerador y denominador por esa misma raíz: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$.

Ejemplo: $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2.- Si el denominador es una raíz n-ésima, multiplicaremos numerador y denominador por la raíz n-ésima, pero con el radicando elevado a un exponente adecuado para que al realizar la multiplicación el exponente del radicando coincida con el índice de la raíz y éstos se anulen: $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{b^{n-m}}$.

Ejemplo: $\frac{3}{\sqrt[5]{6}}=\frac{3}{\sqrt[5]{6}}\cdot\frac{\sqrt[5]{6^4}}{\sqrt[5]{6^4}}=\frac{3\sqrt[5]{6^4}}{\sqrt[5]{6^5}}=\frac{3\sqrt[5]{6^4}}{6}=\frac{\sqrt[5]{6^4}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[5]{6^4}$.

Ejemplo: $\frac{2}{\sqrt[7]{3^3}}=\frac{2}{\sqrt[7]{3^3}}\cdot\frac{\sqrt[7]{3^4}}{\sqrt[7]{3^4}}=\frac{2\sqrt[7]{3^4}}{\sqrt[7]{3^7}}=\frac{2\sqrt[7]{3^4}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt[7]{3^4}$.

3.- Si el denominador es de la forma $a\pm\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, multiplicamos numerados y denominador por el conjugado:

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}}=\frac{c}{a+\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$ (análogo para $a-\sqrt{b}$)

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$ (análogo para $\sqrt{a}-\sqrt{b}$)

Ejemplo:

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{9-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{11}}=\frac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{11}}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}=\frac{5\left(\sqrt{6}+\sqrt{11}\right)}{6-11}=\frac{5\left(\sqrt{6}+\sqrt{11}\right)}{-5}=-\left(\sqrt{6}+\sqrt{11}\right)=-\sqrt{6}-\sqrt{11}$$

EJERCICIOS

1.- Racionaliza:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ e) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{3}{2-\sqrt{3}}$

2.- Racionaliza:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$ e) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

3.- Racionaliza:

a) $\dfrac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{3}{1+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$

g) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ i) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

4.- Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{3}+1}$ b) $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$ c) $\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$

Los ejercicios que siguen a continuación son de dificultad alta.

5.- Prueba que $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

6.- Racionaliza: $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

7.- Racionaliza: $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$