RACIONALIZACIÓN

JUSTIFICACIÓN

Se define fracción como la expresión $\frac{a}{b}$, donde $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ahora bien, teniendo en cuenta que uno de los significados de la fracción es la división: $\frac{a}{b} = a : b$, entonces podemos extender el concepto de fracción considerando para a y b números reales cualesquiera.
Especial atención merece el caso en que a y b son enteros o raíces de enteros (por ejemplo, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\frac{1-\sqrt{3}}{7}$, $\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$, etc…).
Cuando queremos realizar operaciones con estas fracciones, es más que conveniente que en el denominador no aparezcan raíces. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN:

Racionalizar una fracción consiste en hallar otra fracción equivalente de forma que el denominador sea un número entero.

PRERREQUISITOS

Serán necesarias las identidades notables:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Especialmente ésta última. Obsérvese que si a o b son raíces, al hacer el producto de la suma por la diferencia, las raíces desaparecen (debido a los cuadrados).

Ejemplo: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$.

TÉCNICAS DE RACIONALIZACIÓN

Si bien existe una infinidad de tipos de fracciones (las raíces no tienen por qué ser cuadradas…), veremos únicamente la racionalización de tres tipos, por una razón: los demás tipos de racionalización son tan infrecuentes como farragosos.

Consideremos, pues, tres casos:

1.- Si el denominador es una raíz cuadrada, multiplicaremos numerador y denominador por esa misma raíz: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$.

Ejemplo: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

2.- Si el denominador es una raíz n-ésima, multiplicaremos numerador y denominador por la raíz n-ésima, pero con el radicando elevado a un exponente adecuado para que al realizar la multiplicación el exponente del radicando coincida con el índice de la raíz y éstos se anulen: $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\dfrac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\dfrac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}=\dfrac{1}{b}\sqrt[n]{b^{n-m}}$.

Ejemplo: $\dfrac{3}{\sqrt[5]{6}}=\dfrac{3}{\sqrt[5]{6}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{6^4}}{\sqrt[5]{6^4}}=\dfrac{3\sqrt[5]{6^4}}{\sqrt[5]{6^5}}=\dfrac{3\sqrt[5]{6^4}}{6}=\dfrac{\sqrt[5]{6^4}}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{6^4}$.

Ejemplo: $\dfrac{2}{\sqrt[7]{3^3}}=\dfrac{2}{\sqrt[7]{3^3}}\cdot\dfrac{\sqrt[7]{3^4}}{\sqrt[7]{3^4}}=\dfrac{2\sqrt[7]{3^4}}{\sqrt[7]{3^7}}=\dfrac{2\sqrt[7]{3^4}}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt[7]{3^4}$.

3.- Si el denominador es de la forma $a\pm\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}=\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{c\ \ a-\sqrt{b}}{a^2-\ \sqrt{b}^{\ 2}}=\dfrac{c\ \ a-\sqrt{b}}{a^2-b}$ (análogo para $a-\sqrt{b}$)

$\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{c\ \ \sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}^{\ 2}-\ \sqrt{b}^{\ 2}}=\dfrac{c\ \ \sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ (análogo para $\sqrt{a}-\sqrt{b}$)

Ejemplo:

$\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{2\ \ 3-\sqrt{5}}{3^2-\ \sqrt{5}^{\ 2}}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{9-5}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Ejemplo:

$\dfrac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{11}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}-\sqrt{11}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{11}}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}=\dfrac{5\ \ \sqrt{6}+\sqrt{11}}{6-11}=\dfrac{5\ \ \sqrt{6}+\sqrt{11}}{-5}=-\ \ \sqrt{6}+\sqrt{11}\ \ =-\sqrt{6}-\sqrt{11}$

EJERCICIOS NIVEL 1

1.- Racionaliza:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$ e) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$

Sol. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{35}}{7}$; c) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; d) $\frac{2\sqrt[5]{27}}{3}$; e) $4\ \ \sqrt{3}-\sqrt{2}$; f) $6+3\sqrt{3}$

2.- Racionaliza:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{15}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{12}}$ e) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ f) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

Sol. a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{2\sqrt{6}}{6}$; c) $\frac{\sqrt{15}}{5}$; d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; f) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

3.- Racionaliza:

a) $\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$ c) $\frac{14}{3-\sqrt{2}}$

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ e) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$

g) $\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ i) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Sol. a) $\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$; b) $\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\ \ \sqrt{3}-1$; c) $6+2\sqrt{2}$; d) $-3-2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{5}-3$;
f) $-4-3\sqrt{2}$; g) $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$; h) $3-\sqrt{6}$; i) $4-\sqrt{15}$

4.- Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}^{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}^{2}$ b) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)\ 3+2\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}^{2}-3\sqrt{5}$

Sol. a) $6\sqrt{3}$; b) 1 ; c) $4-\sqrt{5}$

EJERCICIOS NIVEL 2

1.- Racionaliza:

a) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}}\quad a>b$ b) $\dfrac{1-m}{\sqrt{m}-1}$ c) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Sol. a) $a+b\ \sqrt{a-b}$; b) $-\sqrt{m}-1$; c) $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

2.- Racionaliza: $\dfrac{3}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

Sol. $\dfrac{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}{2}$

3.- Racionaliza: $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. Pista: Haz el cambio de variable $A=\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Sol. $\dfrac{1}{4}\sqrt{2}+\dfrac{1}{6}\sqrt{3}-\dfrac{1}{12}\sqrt{30}$

4.- Prueba que $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Pista: Como ambos miembros son positivos, se pueden elevar al cuadrado.

5.- Racionaliza: $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

Sol. $\sqrt{3}+\sqrt{2}\ \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

6.- Racionaliza: $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$

Sol. $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{4}$