RESOLUCIÓN RÁPIDA DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

JUSTIFICACIÓN

A través de una serie de ejercicios, vamos a ver qué relaciones hay entre las soluciones de una ecuación de segundo grado y los coeficientes de la ecuación. De esa manera, obtendremos un método para resolver de manera inmediata algunas ecuaciones de segundo grado.

EJERCICIOS

1.- Sabemos que las soluciones (a las que llamaremos x_1 y x_2) de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ son las siguientes:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a) Calcula la suma x_1+x_2. ¿Está el resultado relacionado con alguno de los coeficientes de la ecuación de 2º grado?

b) Calcula el producto $x_1\cdot x_2$. ¿Está el resultado relacionado con alguno de los coeficientes de la ecuación de 2º grado?

c) Completa las siguientes frases:
"En la ecuación de 2º grado $ax^2+bx+c=0$, la suma de las soluciones es igual a…"
"En la ecuación de 2º grado $ax^2+bx+c=0$, el producto de las soluciones es igual a…"

2.- Consideremos la ecuación $x^2-5x+6=0$.
a) ¿Cuánto vale la suma de las soluciones?
b) ¿Cuánto vale el producto de las soluciones?
c) Completa la frase: " La suma de las soluciones de la ecuación es _____, y el producto de las soluciones es _____. Por tanto, las soluciones de la ecuación son ____ y _____.

3.- Resuelve directamente las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-5x+4=0$
b) $x^2+5x+4=0$
c) $x^2-9x+14=0$
d) $x^2+9x+14=0$
e) $x^2-29x+100=0$
f) $x^2+11x+10=0$
g) $3x^2-33x+30=0$
h) $x^2-2x+1=0$
i) $x^2+10x+25=0$
j) $x^2+x-6=0$
k) $x^2-6x-7=0$
l) $x^2-2mx+m^2-1=0$
m) $x^2-2x+1-m^2=0$
n) $x^2-3mx+2m^2=0$

4.- El enfoque visto en el ejercicio 1 para llegar a las relaciones entre las soluciones y los coeficientes de la ecuación cuadrática tiene una seria limitación: no es un método que podamos generalizar para las ecuaciones de tercer grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$, ya que no conocemos las fórmulas para las soluciones de la ecuación cúbica. Aún cuando conociéramos dichas fórmulas, sigue siendo un mal método, pues a partir de la ecuación de grado 5 no existe fórmula para las soluciones. Y no es que no se conozcan las fórmulas, sino que está **demostrado** (por el matemático Galois, 1811-1832) que tales fórmulas no existen.
Para más información sobre la resolución de las ecuaciones de grados 3 y 4, se puede visitar las páginas siguientes:
http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html
http://mathworld.wolfram.com/QuarticEquation.html

Veamos a continuación otro punto de vista:

Sabemos que la factorización de un polinomio de 2º grado viene dado por la expresión $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, donde x_1, x_2 son las raíces del polinomio.

a) Desarrolla la expresión $a(x-x_1)(x-x_2)$

b) Completa: $ax^2+bx+c=$ ____________________

c) Si dos polinomios son iguales, sus coeficientes han de ser iguales. Si igualas los coeficientes de x y los términos independientes, ¿qué dos relaciones obtienes?

5.- Vamos a utilizar el método visto en el ejercicio anterior para ver qué relaciones hay entre las soluciones de una ecuación de tercer grado y los coeficientes:

a) Completa: "La factorización de un polinomio de tercer grado ax^3+ ________________ es: ax^3+ ________________ $=a(x-x_1)($_____$)($_____$)$, donde $x_1,$ ______ son ____.

b) Desarrolla la expresión $a(x-x_1)($_____$)($_____$)$

c) Sigue de manera análoga al ejercicio anterior, y obtén las relaciones buscadas igualando coeficientes.

d) Las fórmulas así obtenidas pueden generalizarse para ecuaciones de cualquier grado. Se puede considerar un polinomio de grado n y obtener una serie de relaciones que cumplen las soluciones. Estas relaciones se llaman las ecuaciones de Cardano-Vieta

6.- Consideremos ahora la ecuación polinómica general:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0.$$

¿Cuánto vale la suma de sus soluciones? ¿Y el producto?